Strukturuntersuchungen kraftfreier Magnetfelder

Richter, Egon W.

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 42, 1990/91, S.161-168

Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

Strukturuntersuchungen kraftfreier Magnetfelder

Von **Egon W. Richter,** Braunschweig

(Eingegangen am 12.9.1991)

Kraftfreie Magnetfelder ergeben sich als Lösungen spezieller nichtlinearer partieller Differentialgleichungen, die häufig durch lineare Gleichungen ersetzt werden. Um die Vielfalt der Strukturen dieser Felder zu erfassen, ist eine Diskussion der nichtlinearen Bestimmungsgleichungen unvermeidbar.

Die Lie-Symmetriegruppen der verschiedenen Ausgangsgleichungen werden berechnet. Für eine ausgewählte Symmetrie werden verschiedene invariante Lösungen zur Darstellung kraftfreier Magnetfelder angegeben.

1 Einleitung

Wenn in elektrisch leitender Materie ein Strom der Dichte $\mathbf{j}$ fließt, kann ein Magnetfeld $\mathbf{B}$ auf die Materie eine Kraft ausüben, deren Dichte durch $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ gegeben ist. Andererseits ist jedem Strom ein Magnetfeld zugeordnet. Die Maxwellschen Gleichungen ergeben im stationären Fall für nichtmagnetisierbare Materie

$$\mu_0 \mathbf{j} = rot\mathbf{B}, \quad div\mathbf{B} = 0, \tag{1}$$

wobei μ_0 die magnetische Feldkonstante ist.

Im folgenden wird ein Raumgebiet $V \in \mathrm{R}^3$ betrachtet, in dem das vom Strom in V an jeder Stelle $\mathbf{x} \in V$ erzeugte Magnetfeld $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ parallel zu dem dort fließenden Strom $\mathbf{j}(\mathbf{x})$ ist. Dann gilt

$$rot\mathbf{B} \times \mathbf{B} = 0, \quad div\mathbf{B} = 0. \tag{2}$$

Magnetfelder, die diesen Bedingungen genügen, heißen *kraftfrei*. Wenn $\mathbf{B}$ in (2) durch ein Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v}$ ersetzt wird, entsprechen diese Gleichungen einem von BELTRAMI [1] in der Hydrodynamik diskutierten Problem.

Auf kraftfreie Magnetfelder machte zuerst LUNDQUIST [2] aufmerksam. Wenig später diskutierten LÜST und SCHLÜTER [3] die Möglichkeit, mit Hilfe dieser Felder gewisse astrophysikalische Phänomene zu deuten. So sollen z.B. (annähernd) kraftfreie Magnetfelder auf der Sonne im Bereich der unteren Korona eine besondere Bedeutung haben (PRIEST [4], LOW [5]). Ferner werden kraftfreie Magnetfelder im Zusammenhang mit Stabilitätsuntersuchungen bei fusionsorientierten Experimenten diskutiert (JENSEN et al. [6]).

In den zurückliegenden drei Jahrzehnten wurden in zahlreichen Arbeiten allgemeingültige Aussagen über kraftfreie Magnetfelder gemacht und spezielle Lösungen des Systems (2) diskutiert. In den meisten dieser Arbeiten wird allerdings anstelle von (2) die äquivalente Formulierung

$$rot\mathbf{B} = \alpha\,\mathbf{B}, \quad div\mathbf{B} = 0 \tag{3}$$

benutzt, wobei für den Proportionalitätsfaktor α in der Regel noch zusätzliche Annahmen gemacht werden. Häufig wird z. B. $\alpha \in R$ gewählt, so daß anstelle des quasilinearen Systems partieller Differentialgleichungen (2) nur noch ein lineares System (3) gelöst werden muß. Unter dieser vereinfachenden Annahme haben CHANDRASEKHAR und KENDALL [7] eine Darstellung für die allgemeine Lösung von (3) angegeben. Wenn α in (3) nicht als Konstante, sondern als differenzierbare Funktion, die auf V vorzugeben ist, interpretiert wird, muß wegen $div\mathbf{B} = 0$ noch

$$\mathbf{B} \cdot grad\,\alpha = 0 \tag{4}$$

als Verträglichkeitsbedingung berücksichtigt werden. Diese Möglichkeit wurde z. B. in [8] ausgenutzt, um weitere kraftfreie Magnetfelder als Lösung des linearen Systems partieller Differentialgleichungen (3), (4) zu gewinnen. Ohne zusätzliche Annahmen für α kann das System (3), (4) als ein System quasilinearer partieller Differentialgleichungen für vier abhängige Variable interpretiert werden. Ein vollständiger Überblick über die Strukturen kraftfreier Magnetfelder läßt sich nur erreichen, wenn die Nichtlinearität ihrer Bestimmungsgleichungen (2) bzw. (3), (4) berücksichtigt wird. Für jede Lösung des quasilinearen Systems (2) kann nachträglich auch ein α berechnet werden, wenn $rot\mathbf{B} = \alpha\,\mathbf{B}$ als Definitionsgleichung für α interpretiert wird. In kartesischen Koordinaten erhält man:

$$\alpha = \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\right) B_z^{-1}, \tag{5}$$

oder

$$\alpha = \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}\right) B_y^{-1}, \tag{6}$$

oder

$$\alpha = \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}\right) B_x^{-1}. \tag{7}$$

Auf diese Weise läßt sich feststellen, ob eine Lösung von (2) zur Lösungsklasse mit $\alpha \in R$ gehört.

In Sonderfällen kann es zweckmäßig sein, zur Herleitung einer Lösung von (2) Annahmen für $\alpha(\mathbf{B})$ zu machen. Wenn das Magnetfeld z. B. nicht von der z-Koordinate abhängt, kann nach EMETS und KOVBASENKO [9] $\alpha(B_z)$ gewählt werden. Wegen (6) und (7) gilt dann

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{d\alpha}{dB_z}\frac{\partial B_z}{\partial x} = -\alpha\frac{d\alpha}{dB_z}B_y, \tag{8}$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial y} = \frac{d\alpha}{dB_z}\frac{\partial B_z}{\partial y} = \alpha\frac{d\alpha}{dB_z}B_x, \tag{9}$$

so daß (4) erfüllt ist. Ferner liefern (6), (7) mit (8), (9)

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} = \alpha\left(\frac{d\alpha}{dB_z}\, B_y^2 - \frac{\partial B_y}{\partial x}\right), \tag{10}$$

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial y^2} = \alpha\left(\frac{d\alpha}{dB_z}\, B_x^2 + \frac{\partial B_x}{\partial y}\right). \tag{11}$$

Die Addition beider Gleichungen ergibt wegen (5), (6) und (7)

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_z}{\partial y^2} - \alpha^{-1}\,\frac{d\alpha}{dB_z}\left(\left(\frac{\partial B_z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial B_z}{\partial y}\right)^2\right) + \alpha^2 B_z = 0. \tag{12}$$

Diese Gleichung für B_z kann mit geeignet gewählter Funktion $\alpha(B_z)$ gelöst werden (vgl. [9]). Die Komponenten B_x und B_y des gesuchten Magnetfeldes ergeben sich anschließend aus (6) und (7). Weitere Möglichkeiten, in Sonderfällen Lösungen des nichtlinearen Problems zu finden, werden u.a. von PRIEST [4] wiedergegeben.

Im folgenden wird die Strukturuntersuchung kraftfreier Magnetfelder auf die Klasse der Ähnlichkeitslösungen ausgedehnt. *Ähnlichkeitslösungen* oder *invariante Lösungen* sind Lösungen, die durch Symmetrietransformationen der betrachteten Differentialgleichung auf sich selbst abgebildet werden (vgl. z.B. OVSIANNIKOV [10], OLVER [11]). Um diese Lösungen für das System (2) bzw. (3), (4) bestimmen zu können, müssen zunächst die entsprechenden Symmetriegruppen ermittelt werden.

2 Bestimmung der Lie-Symmetriegruppen

Transformationen der unabhängigen und abhängigen Variablen eines Differentialgleichungssystems, die Lösungen des Systems wieder auf (im allgemeinen andere) Lösungen desselben Systems abbilden, heißen *Symmetrietransformationen* des Differentialgleichungssystems. Wenn in (2) bzw. (3), (4) die Variablen mit

$$\mathbf{x} := (x, y, z), \quad \mathbf{u} := (B_x, B_y, B_z) \quad \text{bzw. } \mathbf{u} := (B_x, B_y, B_z, \alpha)$$

bezeichnet werden, läßt sich eine zusammenhängende lokale Lie-Punkttransformation in der Form

$$\tilde{\mathbf{x}} = f_g(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad \tilde{\mathbf{u}} = \psi_g(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \tag{13}$$

schreiben. Die Funktionen f_g und ψ_g müssen so bestimmt werden, daß (2) bzw. (3), (4) unter der Transformation invariant sind, wobei $g := (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_r)$ mit $\varepsilon_i \in R$ die r auftretenden Gruppenparameter kennzeichnet.

Für die auszuführenden Berechnungen ist von entscheidender Bedeutung, anstelle einer Lie-Transformationsgruppen G die ihr zugeordnete Lie-Algebra $\mathcal{G}$ verwenden zu können. $\mathcal{G}$ ist ein r-dimensionaler reeller Vektorraum, dessen Elemente Vektorfelder der Form

$$X = \sum_{i=1}^{3} \xi_i(\mathbf{x}, \mathbf{u})\,\frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{\nu=1}^{m} \eta_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{u})\,\frac{\partial}{\partial u_\nu} \quad \text{mit } m = 3 \text{ bzw. } 4 \tag{14}$$

sind. Für diese Elemente ist als zusätzliche Struktur der Kommutator

$$[X_j, X_k] = X_j(X_k) - X_k(X_j) \tag{15}$$

definiert. Im folgenden werden Theoreme benutzt, deren Beweise z.B. OLVER [11] zu entnehmen sind.

Mit Hilfe der auf $\mathcal{G}$ definierten Exponentialabbildung $exp : \mathcal{G} \to G$ kann jedem Vektorfeld $X \in \mathcal{G}$ durch

$$(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}}) = exp(\varepsilon X)\ (\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad \text{für alle } \varepsilon \in \mathrm{R} \tag{16}$$

eine einparametrige Untergruppe von G zugeordnet werden. Die entsprechende lokale Transformationsgruppe ergibt sich für (14) als Lösung des Systems

$$\frac{d\tilde{x}_i}{d\varepsilon} = \xi_i(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}}) \quad \text{mit} \quad \tilde{x}_i(\varepsilon=0) = x_i, \quad i = 1,2,3, \tag{17}$$

$$\frac{d\tilde{u}_\nu}{d\varepsilon} = \eta_\nu(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}}) \quad \text{mit} \quad \tilde{u}_\nu(\varepsilon=0) = u_\nu, \quad \nu = 1,\ldots,m. \tag{18}$$

Wenn $\{X_1, X_2, \ldots, X_r\}$ eine Basis in $\mathcal{G}$ ist, kann jedes Element der zusammenhängenden lokalen Lie-Transformationsgruppe G in der Form

$$(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}}) = exp(t_1 X_1) \cdots exp(t_r X_r)\ (\mathbf{x}, \mathbf{u}) \tag{19}$$

mit geeignet gewählten $t_i \in \mathrm{R}$, $i = 1,..,r$ geschrieben werden.

Zur Bestimmung der Lie-Symmetriegruppen genügt es offenbar, die in (14) sowie (17) und (18) eingehenden *infinitesimalen Elemente* $\xi_i, i = 1,2,3$ und $\eta_\nu, \nu = 1,\ldots,m$ zu berechnen. Anschließend kann eine Basis der zugehörigen Lie-Algebra angegeben werden. Das Verfahren zur Berechnung der infinitesimalen Elemente ist der Literatur zu entnehmen (vgl. z.B. OLVER [11]).

3 Die Symmetriegruppen der Differentialgleichungen für kraftfreie Magnetfelder

Für das System (2) ergibt sich eine achtdimensionale Lie-Algebra, die durch folgende Basis aufgespannt werden kann:

$$\begin{aligned}
X_1 &= \frac{\partial}{\partial x}, \\
X_2 &= \frac{\partial}{\partial y}, \\
X_3 &= \frac{\partial}{\partial z}, \\
X_4 &= y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y} + B_y\frac{\partial}{\partial B_x} - B_x\frac{\partial}{\partial B_y}, \\
X_5 &= x\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial x} + B_x\frac{\partial}{\partial B_z} - B_z\frac{\partial}{\partial B_x}, \\
X_6 &= z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z} + B_z\frac{\partial}{\partial B_y} - B_y\frac{\partial}{\partial B_z},
\end{aligned} \tag{20}$$

$$X_7 = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z},$$
$$X_8 = B_x\frac{\partial}{\partial B_x} + B_y\frac{\partial}{\partial B_y} + B_z\frac{\partial}{\partial B_z}.$$

Berechnet man mit (15) die Kommutatoren dieser Basis, ergibt sich Tabelle 1.

$[X_\downarrow, X_\rightarrow]$	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8
X_1	0	0	0	$-X_2$	X_3	0	X_1	0
X_2	0	0	0	X_1	0	$-X_3$	X_2	0
X_3	0	0	0	0	$-X_1$	X_2	X_3	0
X_4	X_2	$-X_1$	0	0	$-X_6$	X_5	0	0
X_5	$-X_3$	0	X_1	X_6	0	$-X_4$	0	0
X_6	0	X_3	$-X_2$	$-X_5$	X_4	0	0	0
X_7	$-X_1$	$-X_2$	$-X_3$	0	0	0	0	0
X_8	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabelle 1: Kommutatortabelle der Basis (20)

Durch die Basiselemente werden einparametrige Transformationsgruppen G_i, $i=1,\dots,8$ erzeugt, die aus (17) und (18) zu berechnen sind:

$$\begin{aligned}
G_1 &: \tilde{x} = x+\varepsilon,\ \tilde{y}=y,\ \tilde{z}=z,\ \tilde{B}_x = B_x,\ \tilde{B}_y = B_y,\ \tilde{B}_z = B_z,\\
G_2 &: \tilde{y} = y+\varepsilon,\ \tilde{x}=x,\ \tilde{z}=z,\ \tilde{B}_x = B_x,\ \tilde{B}_y = B_y,\ \tilde{B}_z = B_z,\\
G_3 &: \tilde{z} = z+\varepsilon,\ \tilde{x}=x,\ \tilde{y}=y,\ \tilde{B}_x = B_x,\ \tilde{B}_y = B_y,\ \tilde{B}_z = B_z,\\
G_4 &: \tilde{x} = x\cos\varepsilon + y\sin\varepsilon,\ \tilde{y} = y\cos\varepsilon - x\sin\varepsilon,\ \tilde{z}=z,\\
&: \tilde{B}_x = B_x\cos\varepsilon + B_y\sin\varepsilon,\ \tilde{B}_y = B_y\cos\varepsilon - B_x\sin\varepsilon,\ \tilde{B}_z = B_z,\\
G_5 &: \tilde{x} = x\cos\varepsilon - z\sin\varepsilon,\ \tilde{z} = z\cos\varepsilon + x\sin\varepsilon,\ \tilde{y}=y,\\
&: \tilde{B}_x = B_x\cos\varepsilon - B_z\sin\varepsilon,\ \tilde{B}_z = B_z\cos\varepsilon + B_x\sin\varepsilon,\ \tilde{B}_y = B_y,\\
G_6 &: \tilde{y} = y\cos\varepsilon + z\sin\varepsilon,\ \tilde{z} = z\cos\varepsilon - y\sin\varepsilon,\ \tilde{x}=x,\\
&: \tilde{B}_y = B_y\cos\varepsilon + B_z\sin\varepsilon,\ \tilde{B}_z = B_z\cos\varepsilon - B_y\sin\varepsilon,\ \tilde{B}_x = B_x,\\
G_7 &: \tilde{x} = x\exp\varepsilon,\ \tilde{y} = y\exp\varepsilon,\ \tilde{z} = z\exp\varepsilon,\ \tilde{B}_x = B_x,\ \tilde{B}_y = B_y,\ \tilde{B}_z = B_z,\\
G_8 &: \tilde{B}_x = B_x\exp\varepsilon,\ \tilde{B}_y = B_y\exp\varepsilon,\ \tilde{B}_z = B_z\exp\varepsilon,\ \tilde{x}=x,\ \tilde{y}=y,\ \tilde{z}=z.
\end{aligned} \tag{21}$$

Die Untergruppen G_1, G_2, G_3 beschreiben räumliche Translationen, die Untergruppen G_4, G_5, G_6 beschreiben räumliche Drehungen und die Untergruppen G_7 sowie G_8 beschreiben Skalierungen der Ortskoordinaten bzw. des Magnetfeldes.

Für das System (3), (4) ergibt sich ebenfalls eine achtdimensionale Lie-Algebra mit einer Basis, die die Elemente X_1 bis X_6 und X_8 aus (20) enthält sowie

$$X_7 = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z} - \alpha\frac{\partial}{\partial \alpha}.$$

Die zugehörige Kommutatortabelle ist identisch mit Tabelle 1.

Im Unterschied zu den beiden bisher behandelten nichtlinearen Systemen ist (3) mit $\alpha \in \mathrm{R}$ ein lineares partielles Differentialgleichungssystem, für das sich erwartungsgemäß eine unendlichdimensionale Lie-Algebra ergibt. Der Grund dafür ist, daß (3) unter der Transformation

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}, \quad \tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{B} + \varepsilon\eta_0(\mathbf{x}), \tag{22}$$

wobei η_0 irgendeine vektorwertige Funktion ist, die

$$rot\eta_0 = \alpha\,\eta_0, \quad div\eta_0 = 0 \tag{23}$$

genügt, trivialerweise invariant ist. Abgesehen von dieser Trivialität ergeben sich für (3) Transformationen, denen im Fall $\alpha \neq 0$ eine siebendimensionale Lie-Algebra zugeordnet ist. Als Basiselemente können aus (20) die Elemente X_1 bis X_6 sowie das Element X_8 verwendet werden. Wenn $\alpha = 0$ gesetzt wird, d.h. magnetostatische Magnetfelder betrachtet werden (die trivialerweise kraftfreie Felder sind), ist (20) auch eine Basis der sich für diese Felder ergebenden achtdimensionalen Lie-Algebra.

4 Invariante Lösungen

Alle Gruppenelemente der lokalen Transformationsgruppe des Systems (2) bzw. (3), (4) können nach (19) für $r = 8$ mit Hilfe der Vektorfelder (20) erzeugt werden. Aus jeder Lösung eines Systems kann durch dessen Symmetriegruppen wieder eine Lösung desselben Systems erzeugt werden. Als Beispiel werden im folgenden die Untergruppen G_3 und G_4 benutzt, die bei (2) sowie (3), (4) (auch im Fall $\alpha \in R$) auftreten. Wenn man zunächst G_3 und anschließend G_4 auf eine in Zylinderkoordinaten (ϱ, φ, z) formulierte Lösung $B_\varrho(\varrho, \varphi, z)$, $B_\varphi(\varrho, \varphi, z)$, $B_z(\varrho, \varphi, z)$ eines der genannten Systeme anwendet, ergibt sich

$$\begin{aligned} \tilde{B}_\varrho(\varrho, \varphi, z) &= \tilde{B}_\varrho(\varrho, \varphi + \varepsilon_4, z - \varepsilon_3), \\ \tilde{B}_\varphi(\varrho, \varphi, z) &= \tilde{B}_\varphi(\varrho, \varphi + \varepsilon_4, z - \varepsilon_3), \\ \tilde{B}_z(\varrho, \varphi, z) &= \tilde{B}_z(\varrho, \varphi + \varepsilon_4, z - \varepsilon_3) \end{aligned} \tag{24}$$

als Lösung desselben Systems. Offenbar ist die vorgegebene Lösung unter den verwendeten Transformationen nur dann invariant, wenn sie von φ und z unabhängig ist.

Das Verfahren zur Berechnung invarianter Lösungen kann der Literatur entnommen werden (z.B. Ovsiannikov [10], Olver [11]). Danach sind zunächst die invarianten Funktionen f für G_3 und G_4 aus den partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung

$$X_3(f) = 0, \quad X_4(f) = 0 \tag{25}$$

zu berechnen. Mit Hilfe der Charakteristikenmethode findet man vier Invarianten, von denen eine, nämlich $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$, als neue unabhängige Veränderliche gewählt wird. Die übrigen drei Invarianten $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ sind neue, von ϱ abhängige Variable. Aus der Rechnung ergibt sich ferner

$$\begin{aligned} B_x &= \varrho^{-1}\big(y\zeta_1(\varrho) + x\zeta_2(\varrho)\big), \\ B_y &= \varrho^{-1}\big(y\zeta_2(\varrho) - x\zeta_1(\varrho)\big), \\ B_z &= \zeta_3(\varrho). \end{aligned} \tag{26}$$

Mit der Transformation $x = \varrho \cos \varphi$, $y = \varrho \sin \varphi$ folgen aus (26) in Zylinderkoordinaten

$$B_\varrho = \zeta_2(\varrho), \quad B_\varphi = -\zeta_1(\varrho), \quad B_z = \zeta_3(\varrho). \tag{27}$$

In (2) eingesetzt, erhält man ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen für $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$, dessen Lösungen Ähnlichkeitslösungen des ursprünglichen Systems partieller Differentialgleichungen liefern.

Das System gewöhnlicher Differentialgleichungen läßt nur für $\zeta_2 = 0$ nichttriviale kraftfreie Magnetfelder (d.h. $\alpha \neq 0$) zu, für die dann lediglich noch

$$\varrho\zeta_3 \frac{d\zeta_3}{d\varrho} + \zeta_1 \frac{d\varrho\zeta_1}{d\varrho} = 0 \tag{28}$$

erfüllt werden muß. Wegen der Definitionsgleichungen für α (d.h. (5) bzw. (6) bzw. (7)) gilt

$$\alpha = \zeta_1^{-1} \frac{d\zeta_3}{d\varrho}. \tag{29}$$

Wenn $\alpha \in R$ gewählt und die Skalierung $\lambda = \alpha\varrho$ benutzt wird, geht (28) mit (29) in eine Besselsche Differentialgleichung über:

$$\lambda \frac{d^2\zeta_3}{d\lambda^2} + \frac{d\zeta_3}{d\lambda} + \lambda\zeta_3 = 0. \tag{30}$$

Als reguläre Lösung bei $\lambda = 0$ ergibt sich $\zeta_3 = B_0 J_0(\lambda)$, $B_0 \in R$, wobei J_0 die Besselsche Funktion nullter Ordnung ist. Wegen (29) gilt

$$\zeta_1 = B_0 \frac{dJ_0}{d\lambda} = -B_0 J_1(\lambda)$$

mit der Besselschen Funktion erster Ordnung J_1. Somit ergibt sich für (27)

$$B_\varrho = 0, \quad B_\varphi = B_0 J_1(\lambda), \quad B_z = B_0 J_0(\lambda), \quad \lambda = \alpha\varrho, \tag{31}$$

das Lundquist-Feld (LUNDQUIST [2]). Dieses häufig zitierte kraftfreie Magnetfeld für $\alpha \in R$ ist also eine Ähnlichkeitslösung von (3), (4) unter Berücksichtigung der Untergruppen G_3 und G_4.

Wenn in (29) α als Funktion von ϱ angesetzt wird, folgt aus (28) für $\zeta_1 \neq 0$ die lineare Differentialgleichung

$$\varrho \frac{d^2\zeta_3}{d\varrho^2} + \left(1 - \frac{\varrho}{\alpha}\frac{d\alpha}{d\varrho}\right)\frac{d\zeta_3}{d\varrho} + \alpha^2\varrho\zeta_3 = 0, \tag{32}$$

die bei geeigneter Wahl von $\alpha(\varrho)$ gelöst werden kann. Zum Beispiel ergibt sich für $\alpha = \sqrt{\nu(1-\nu)}\,\varrho^{-1}$, $0 < \nu < 1$ aus (32) $\zeta_3 = C\varrho^{-\nu}$, $C \in R$ und wegen (29) sowie (27) folgen

$$B_\varrho = 0, \quad B_\varphi = \sqrt{\frac{\nu}{1-\nu}}\, C\varrho^{-\nu}, \quad B_z = C\varrho^{-\nu}. \tag{33}$$

Wenn in (29) $\alpha\big(\zeta_3(\varrho)\big)$ gewählt wird, erhält man anstelle von (32)

$$\frac{d^2\zeta_3}{d\varrho^2} + \varrho^{-1}\frac{d\zeta_3}{d\varrho} - \alpha^{-1}\frac{d\alpha}{d\zeta_3}\left(\frac{d\zeta_3}{d\varrho}\right)^2 + \alpha^2\zeta_3 = 0. \tag{34}$$

Diese nichtlineare Differentialgleichung stimmt mit (12) überein, wenn dort B_z durch ζ_3 ersetzt und wegen $\zeta_3(\varrho)$

$$\frac{\partial \zeta_3}{\partial x} = \frac{x}{\varrho}\frac{d\zeta_3}{d\varrho}, \quad \frac{\partial \zeta_3}{\partial y} = \frac{y}{\varrho}\frac{d\zeta_3}{d\varrho} \tag{35}$$

ausgenutzt wird. Die von EMETS und KOVBASENKO [9] angegebenen Lösungen der Differentialgleichung (12) können somit unmittelbar als Lösungen von (34) übernommen werden. Wenn z.B. $\alpha = \varkappa\sqrt{1+C\zeta_3^{-2}}$ mit $\varkappa \in R$ und einer Konstanten C (deren Definitionsbereich später anzugeben ist) gewählt wird, gilt

$$\frac{d^2\zeta_3}{d\varrho^2} - \alpha^{-1}\frac{d\alpha}{d\zeta_3}\left(\frac{d\zeta_3}{d\varrho}\right)^2 = \frac{\alpha}{\varkappa}\frac{d^2\sqrt{\zeta_3^2+C}}{d\varrho^2} \tag{36}$$

und wegen

$$\frac{d\zeta_3}{d\varrho} = \frac{\alpha}{\varkappa}\frac{d\sqrt{\zeta_3^2+C}}{d\varrho}$$

geht (34) in (30) über, wobei dort $\lambda = \varkappa\varrho$ einzutragen und $\sqrt{\zeta_3^2+C}$ anstelle von ζ_3 zu setzen ist. Die sich ergebende invariante Lösung des nichtlinearen partiellen Differentialgleichungssystems (3), (4) geht für $C = 0$ in das Lundquist-Feld (31) über.

Eine systematische Diskussion der Ähnlichkeitslösungen für kraftfreie Magnetfelder wird vorbereitet und später veröffentlicht.

Literatur

[1] E. Beltrami: Ist. Lombardo (2) **22** (1889), 121.
[2] S. Lundquist: Ark. Fysik **2** (1951), 361.
[3] R. Lüst und A. Schlüter: Z. Astrophys. **34** (1954), 263.
[4] E. R. Priest: Solar Magnetohydrodynamics (Reidel, Dordrecht, 1984).
[5] B.C. Low in G. Burbidge et al. (ed.): Annu. Rev. Astron. Astrophys. **28** (1990), 491.
[6] T.H. Jensen, M.-S. Chu and J.M. Greene: Phys. Fluids **30** (1987), 2759.
[7] S. Chandrasekhar and P.C. Kendall: Ap. J. **126** (1957), 457.
[8] E.W. Richter: Z. Phys. **159** (1960), 194.
[9] Yu. P. Ements and Yu. P. Kovbasenko: Sov. Phys. Tech. Phys. **28** (1983), 879.
[10] L.V. Ovsiannikov: Group Analysis of Differential Equations (Academic Press, New York, 1982).
[11] P.J. Olver: Application of Lie Groups to Differential Equations (Springer, Berlin, 1986).